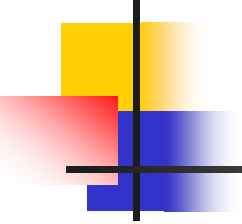


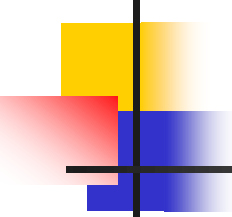
金融機関経営論2

第5回講義 10月14日(火)



前週の課題

- 問題 以下の問いに答えなさい。
- ①いま、行使価格500円のコールプレミアムが50円、行使価格500円のプットプレミアムが38円となっているとき、ストラドルの売りを組んだとする。このとき満期の原資産価格が(a)400円の時、(b)500円の時、(c)600円の時、ペイオフはいくらになるか？ただし、時間経過による価値の変化は含めない。
- ②原資産価格500円、行使価格460円のコールプレミアムが70円であるとする。このとき、本源的価値と時間価値はそれぞれいくらになるか？



答え

① ストラドルの売り＝コールのショート＋プットのショートなので、契約当初に $50 + 38 = 88$ 円のプレミアムを得る。

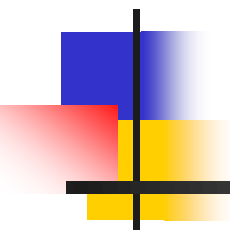
(a) 400円の場合は、プットが行使されて $400 - 500 = -100$ だから、100円の損失。いま時間価値を考慮しないので、 $-100 + 88 = -12$ 。よって12円の損失。

(b) 500円の場合は、オプションが行使されず、88円の利益。

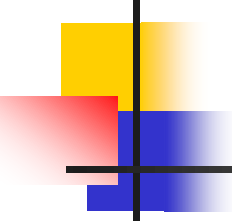
(c) 600円の場合は、(a)とは違いコールが行使されて100円の損失。いま時間価値を考慮しないので、 $-100 + 88 = -12$ 。よって12円の損失。

② 本質的価値: $500 - 460 = 40$ 円

時間価値: $70 - 40 = 30$ 円



5. オプションの価格理論



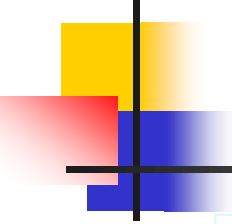
5. オプションの価格理論

- 5.1 プットコール・パリティ
- プットとコールの裁定

投資行動	現在のCF	満期のCF	
		$S^* \geq K$	$S^* < K$
コール買い	$-C$	$S^* - K$	0
プット売り	P	0	$S^* - K$
原資産売り	S	$-S^*$	$-S^*$
割引債買い	$-K/(1+r)$	K	K
合計	X	0	0

5. オプションの価格理論

投資行動	現在のCF	満期のCF	
		$S^* \geq K$	$S^* < K$
コール売り	C	$K - S^*$	0
プット買い	$-P$	0	$K - S^*$
原資産買い	$-S$	S^*	S^*
割引債発行	$K/(1+r)$	$-K$	$-K$
合計	Y	0	0



5. オプションの価格理論

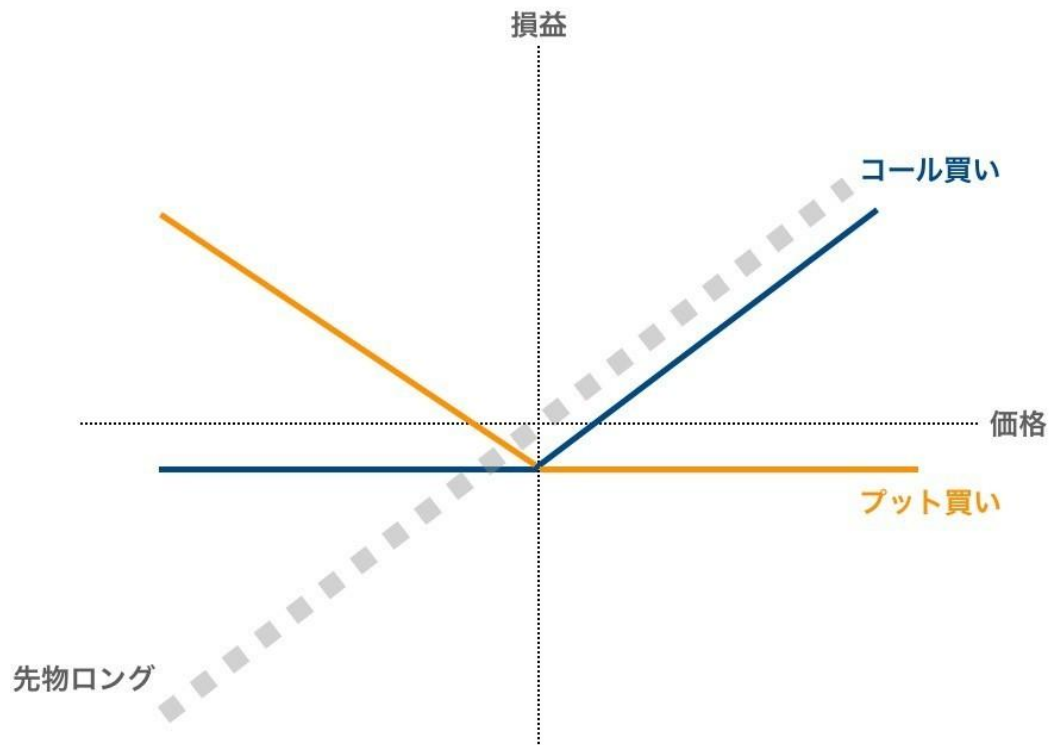
- プットコール・パリティ式
 - 裁定が働くならば $X=Y=0$
 - $C=P+S-K/(1+r)$

- C: 現在のコール・プレミアム
- P: 現在のプット・プレミアム
- S: 現在の原資産の価格
- S^* : 将来の原資産の価格
- K: 権利行使価格
- r: 現在から満期までのリスクフリー・レート

5. オプションの価格理論

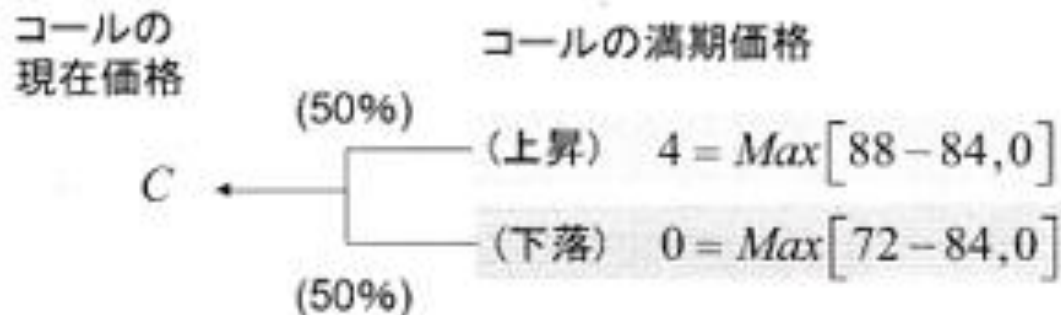
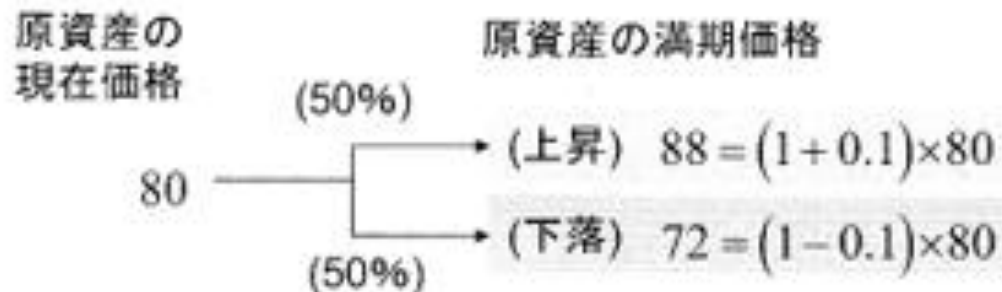
- $C = P + S - K / (1 + r)$

先物のロング

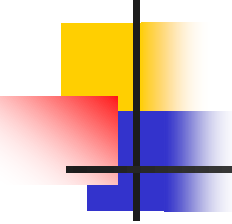


5. オプションの価格理論

- 5.2 ニ項モデル
- ①数値例による説明



※リスクフリーレートは5%とする。



5. オプションの価格理論

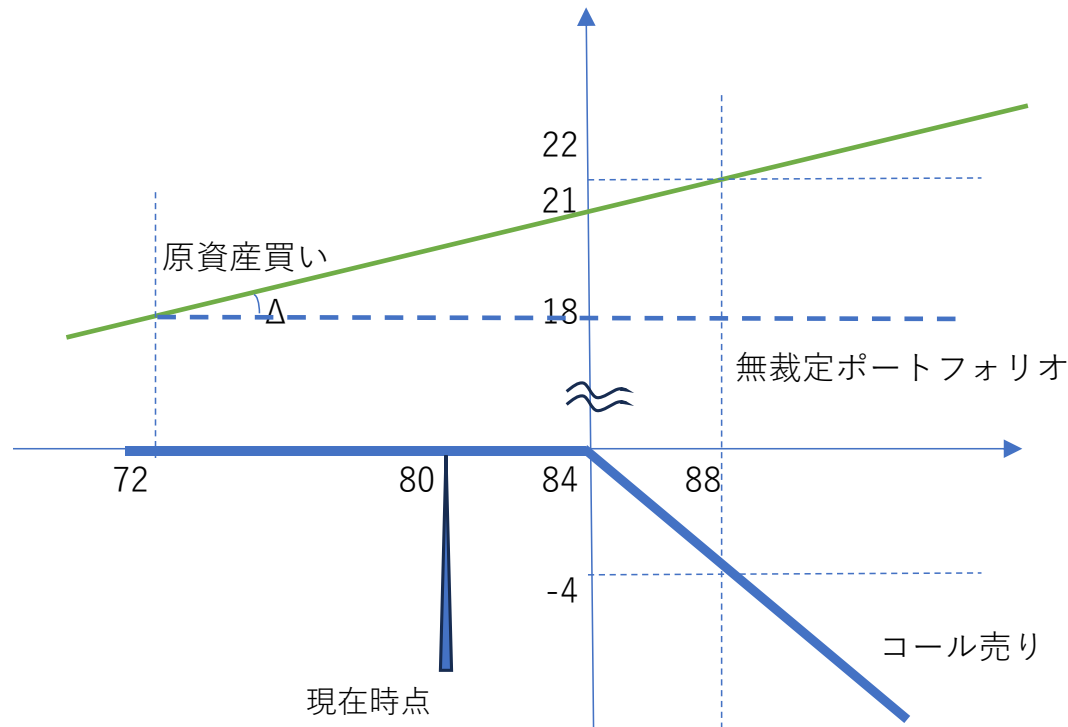
- 無裁定(完全ヘッジ)ポートフォリオ
- [1単位のコールのショート] + [Δ 単位の原資産のロング]

	現時点	満期時点	
		下落	上昇
1単位のコールの売り	$-C$	0	-4
Δ 単位の原資産の買い	80Δ	72Δ	88Δ
合計	$-C + 80\Delta$	$0 + 72\Delta$	$-4 + 88\Delta$

- 満期時点のペイオフが同じになるように最適ヘッジ比率 Δ を求める
- $0 + 72\Delta = -4 + 88\Delta \Rightarrow \Delta = 0.25$
- 無裁定ポートフォリオの満期時点の価値は、18円

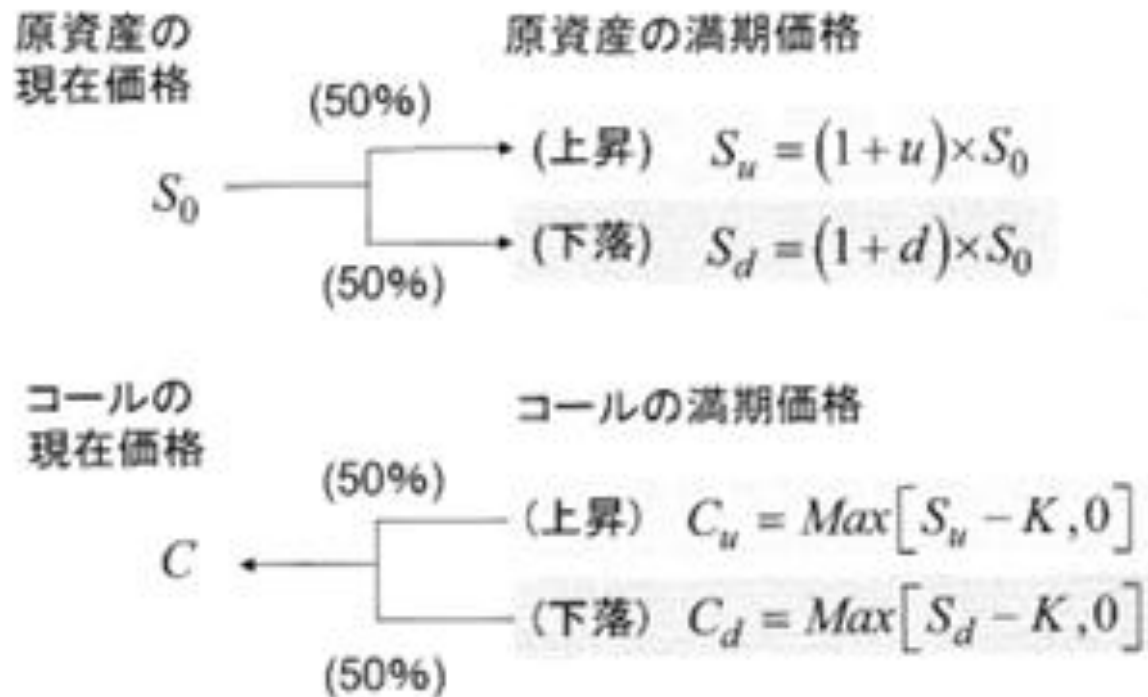
5. オプションの価格理論

- 現時点でのポートフォリオの価値は、この18円をリスクフリーレートで割り引いたものに等しいので
- $-C + 80 \times 0.25 = 18 / (1 + 0.05)$
 $\Rightarrow C = 20 - 17.14 = 2.86$ 円



5. オプションの価格理論

■ ②二項モデルの一般化



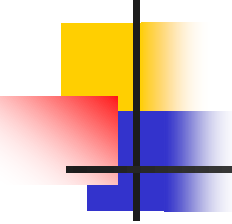
※リスクフリーレートは $r\%$ とする

5. オプションの価格理論

- 無裁定(完全ヘッジ)ポートフォリオ
- [1単位のコールのショート] + [Δ 単位の原資産のロング]

	現時点	満期時点	
		下落	上昇
1単位のコールの売り	$-C$	$-C_d$	$-C_u$
Δ 単位の原資産の買い	$\Delta \times S_0$	$\Delta \times S_d$	$\Delta \times S_u$
合計	$-C + \Delta \times S_0$	$-C_d + \Delta \times S_d$	$-C_u + \Delta \times S_u$

- 満期時点のペイオフが同じになるように最適ヘッジ比率 Δ を求める
- $-C_d + \Delta \times S_d = -C_u + \Delta \times S_u$
- $\rightarrow \Delta = \frac{C_u - C_d}{S_u - S_d} = \frac{C_u - C_d}{(u-d) \times S_0}$



5. オプションの価格理論

- 満期時点の価値をリスクフリーレートで割り引いたものが、現在の価値に等しいので

- $$-C + \Delta \times S_0 = \frac{(-C_u + \Delta \times S_u)}{(1+r)}$$

- プレミアム C は

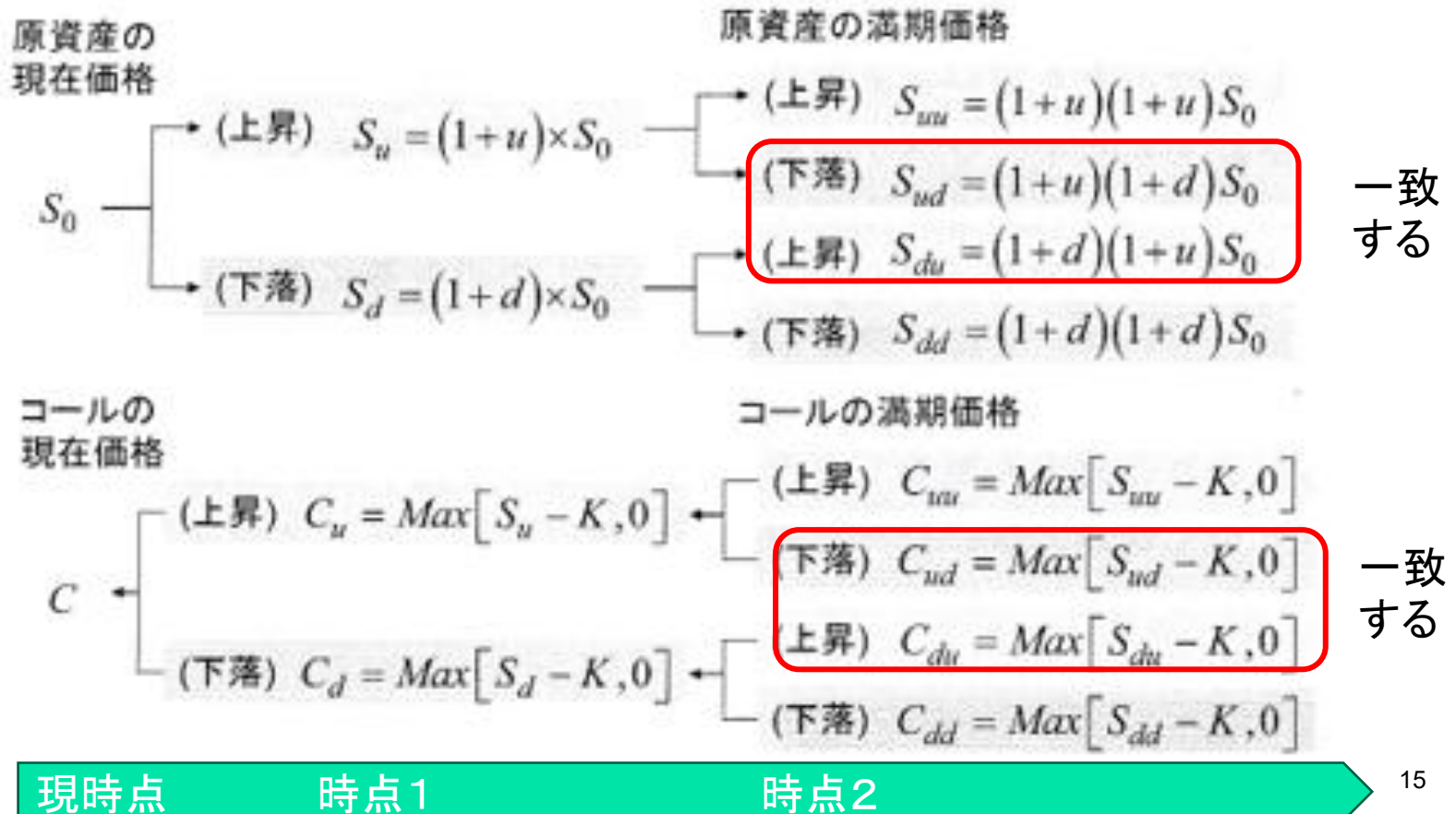
- $$C = \frac{p^* \times C_u + (1-p^*) \times C_d}{(1+r)}$$

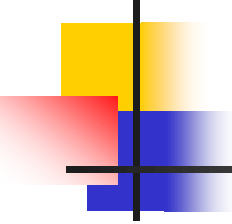
- ただし $p^* = \frac{r-d}{u-d}$  マルチンゲール(リスク中立)確率

- p^* にはリスクプレミアムは含まれない(リスク中立者による評価)
 - また、モデルの当初に設定した原資産の各状態の生起確率(本例では50%)も価格決定には使われていないことに留意。

5. オプションの価格理論

■ ③多期間二項モデル





5. オプションの価格理論

- 時点2をもとに時点1のオプションプレミアムを求める

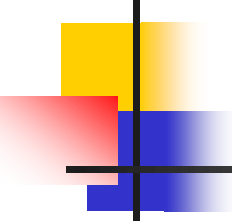
- $C_u = \frac{p^* \times C_{uu} + (1-p^*) \times C_{ud}}{(1+r)}, C_d = \frac{p^* \times C_{du} + (1-p^*) \times C_{dd}}{(1+r)}$

- ただし $p^* = \frac{r-d}{u-d}$

- 時点1をもとに現時点のオプションプレミアムを求める

- $$C = \frac{p^* \times C_u + (1-p^*) \times C_d}{(1+r)}$$
$$= \frac{p^{*2} \times C_{uu} + 2p^*(1-p^*) \times C_{ud} + (1-p^*)^2 \times C_{dd}}{(1+r)^2}$$

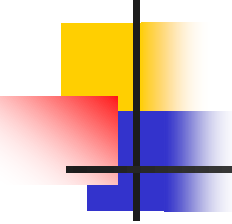
- 多期間であれば、このバックワードのプロセスを繰り返す



5. オプションの価格理論

■ 5. 6 ブラック・ショールズモデル

- 仮定①: 資本市場の完全性
 - 競争市場であり、市場参加者はプライステイカーである
 - 摩擦のない市場であり、税や取引コストがない
 - 情報の非対称性がなく、情報コストもない
 - 原資産は無限分割可能で、少額でもポートフォリオを構成できる
- 仮定②: 同一金利で無制限に貸借可能
- 仮定③: 期中の金利は一定
- 仮定④: (満期のある)ヨーロピアンオプションを想定する



5. オプションの価格理論

- 仮定⑤: 原資産に期中の配当はない
- 仮定⑥: 原資産価格は、伊藤プロセスに従う

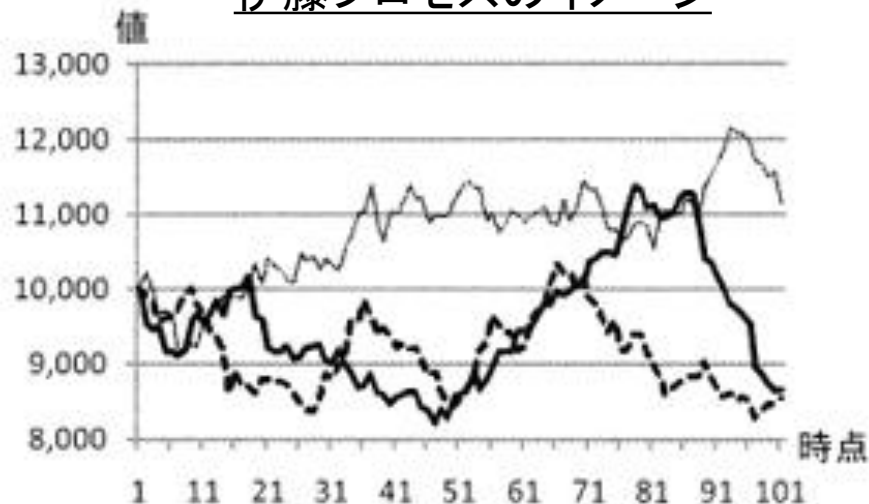
$$\blacksquare dS_t = \underbrace{\mu S_t \cdot dt}_{\text{ドリフト項}} + \underbrace{\sigma S_t \cdot dz}_{\text{ウィーナー過程 (ブラウン運動)}} \quad (1)$$

- dS_t : 原資産価格の微小変化
- S_t : 原資産価格
- dt : 時間の微小変化
- μ : 期待リターン
- σ : ボラティリティ (標準偏差)
- dz : 標準正規確率過程

5. オプションの価格理論

- (1)式の両辺を S_t で割ると
- $dS_t/S_t = \mu dt + \sigma dz$
- 株価の変化率を、一定のトレンドと一定のリスクをもった定常過程として表す(幾何ブラウン運動)

伊藤プロセスのイメージ



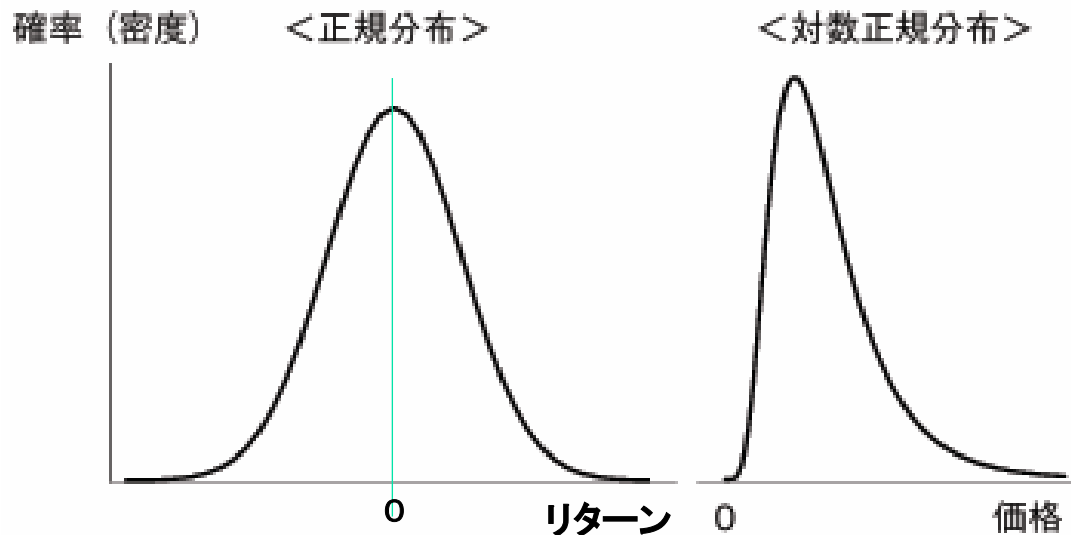
※初期値:10000、 $\mu=0.03$ 、 $\sigma=0.2$ 、 $dt=0.01$ とした。

5. オプションの価格理論

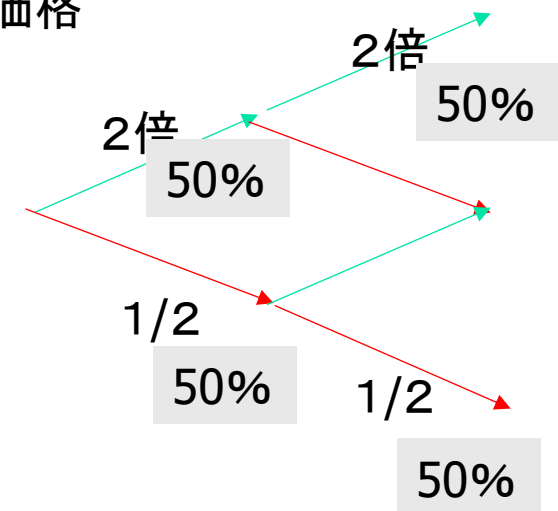
- 原資産価格が伊藤プロセスに従うとき、その対数値 $\log S = f$ は伊藤のレンマから

- $df = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma \cdot dz$

- 原資産のリターンが正規分布に従うとき、原資産価格は対数正規分布に従う



ツリー構造



5. オプションの価格理論

- ブラック・ショールズ・モデルによる解
- $C = S \times N(d_1) + Ke^{-rT} \times N(d_2)$

複製ポートフォリオでは原資産の保有＝利益

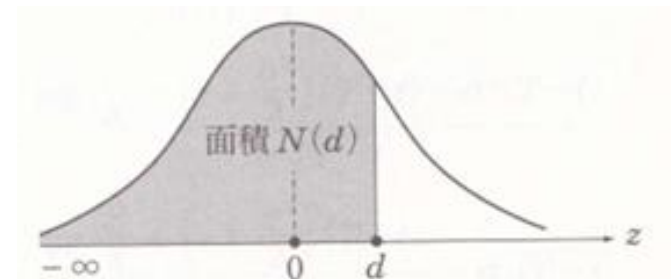
満期時点でオプションが行使される可能性を考慮した上での、原資産の現在価値

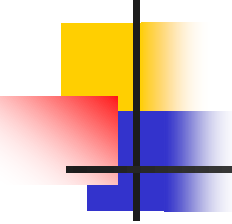
複製ポートフォリオでは割引債の購入＝コスト部分

満期時に支払う額面（＝権利行使価格）を現在価値で割り引いた額
× 実際に支払う可能性

$$d_1 = \frac{\ln(S/X) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma T}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma T = \frac{\ln(S/X) + (r - \sigma^2/2)T}{\sigma T}$$





5. オプションの価格理論

- C : コールプレミアム
 - S : 原資産の現在価格
 - K : 権利行使価格
 - r : リスクフリーレート
 - σ : 原資産のボラティリティ
 - T : 満期までの残存期間
-
- プットコール・パリティの関係を用いて
 - $$P = Ke^{-rT} \times N(-d_2) - S \times N(-d_1)$$
 - P : プットプレミアム
 - (複製ポートフォリオは割引債を発行して資金調達し、原資産を売る)

5. オプションの価格理論

- (例題) 原資産価格10,400円、行使価格10,000円、残存期間0.25年、リスクフリーレート3%/年、ボラティリティ20%とする。コール・オプションのプレミアムはいくらか？

S	K	T	r	σ
10,400	10,000	0.25	0.03	0.2
d_1	d_2	$N(d_1)$	$N(d_2)$	C
0.517	0.417	0.697	0.662	686

ただし $d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{T}$

5. オプションの価格理論

点Aより株価が低い領域:
即座に行使可能

■ 5.7 アメリカンオプション

- コールのプレミアムはヨーロピアンと一致

- プットの権利行使条件は

- $p \geq Xe^{-rt} - S_0$

- しかしアメリカンプットの場合はディープ・イン・ザ・マネーでは即座に行使可能な強い条件が課せられる

- $p \geq X - S_0$

図7.2 ▶ 株価 S_0 によるアメリカン・プット・オプションの価格の変化

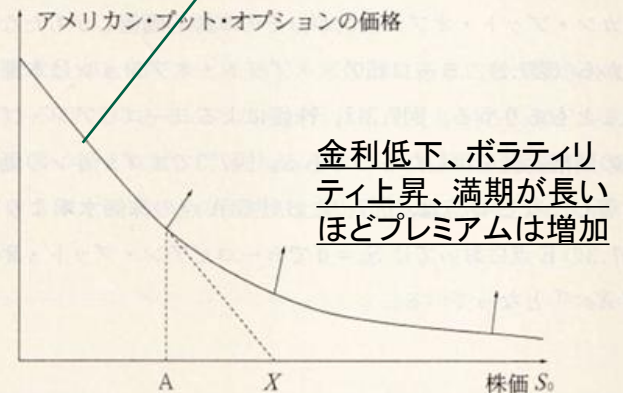
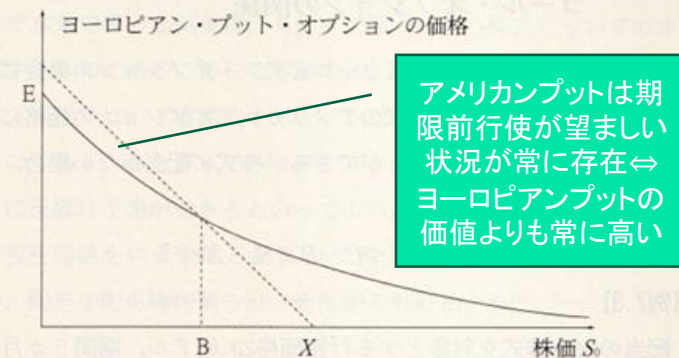
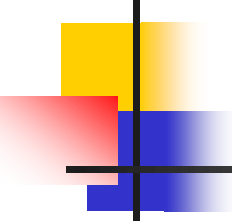


図7.3 ▶ 株価 S_0 によるヨーロピアン・プット・オプションの価格の変化



(出所) ジョン・ハル『フィナンシャルエンジニアリング』



5. オプションの価格理論

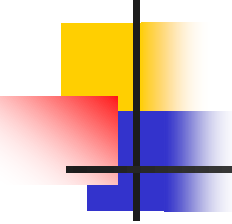
■ 5. 8 その他

■ ① 配当の影響

- プット: 複製ポートフォリオで考えると(金利収益+配当)を受け取ることになるので、プレミアムを上昇させる要因。
- コール: 逆に、(金利収益+配当)を返済することになるので、プレミアムを下落させる要因。

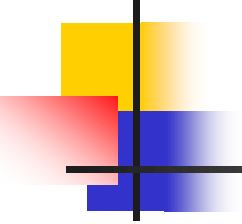
■ ② ボラティリティ

- ヒストリカルボラティリティ: 過去のデータから求めたボラティリティ。
- インプライドボラティリティ: ブラック・ショールズモデルを用いて逆算したボラティリティ。



5. オプションの価格理論

- Long-Term Capital Managementの破綻
 - ショールズとマートンが参画していたヘッジファンドが、LTCM。
 - 1997年に発生したアジア通貨危機と、それに伴って発生した翌年のロシア財政危機に際して判断ミス。
 - ショールズらの構築した投資モデルは、ロシア国債が債務不履行に陥る危険性を「100万年に3回」と楽観視。
 - ロシア国債の価格は回復すると予想し、デリバティブを駆使し巨額の投資を継続。
- 長期では、オプションのBS式は成立しない。
- リスクマネジメントでは予想(期待)が重要！



本日の課題

- 問題 以下の問いに答えなさい。
- (1) 原資産価格500円、行使価格460円のコールオプションのプレミアムが70円とする。また、満期までのリスクフリーレートは5%とする。このとき、プットオプションのプレミアムはいくらか？
- (2) 原資産は現在80円、時点1で確率50%で88円になり、確率50%で72円になるとする。この期間のリスクフリーレートは5%とする。
 - ① リスク中立確率はいくらか？
 - ② この資産の行使価格84円のプットオプションのプレミアムはいくらか？