



金融工学

第13回講義 1月13日(火)



第1回授業の課題

以下の計算問題を解きなさい。四捨五入して小数点以下第二位まで求めなさい。

(1) C、D社のリスクとリターンを計算して、どちらに投資すべきかを答えてください。

収益率 (%)	C社(確率)	D社 (確率)
-20	5	1
-10	15	5
0	45	60
10	20	33
20	15	1



問題(1)の答え

- C社の計算

- 期待収益率

$$(-20 \times 5\%) + (-10 \times 15\%) + (0 \times 45\%) + (10 \times 20\%) + (20 \times 15\%) = \mathbf{2.5\%}$$

- 分散

$$5\% \times (-20 - 2.5)^2 + 15\% \times (-10 - 2.5)^2 + 45\% \times (0 - 2.5)^2 + 20\% \times (10 - 2.5)^2 + 15\% \times (20 - 2.5)^2 = \mathbf{108.75}$$

- 標準偏差 = $\sqrt{108.75} \approx \mathbf{10.43}$



問題(1)の答え

- D社の計算

- 期待収益率

$$(-20 \times 1\%) + (-10 \times 5\%) + (0 \times 60\%) + (10 \times 33\%) + (20 \times 1\%) = \mathbf{2.8\%}$$

- 分散

$$1\% \times (-20 - 2.8)^2 + 5\% \times (-10 - 2.8)^2 + 60\% \times (0 - 2.8)^2 + 33\% \times (10 - 2.8)^2 + 1\% \times (20 - 2.8)^2 = \mathbf{38.15}$$

- 標準偏差 = $\sqrt{38.15} \approx \mathbf{6.18}$

- 結論: D社に投資すべき



第1回授業の課題

(2) 資産Bと資産C、資産Bと資産Dの相関係数はいくらか？

	状態1	状態2	状態3	状態4	期待値	分散
確率(%)	20	30	40	10		
資産B	-2	0	2	6	1.0	5.0
資産C	-7	2	5	8	2.0	23.4
資産D	4	2	0	-4	1.0	5.0

(3) つぎのポートフォリオのリターンとリスクはいくらか？

	保有比率 (%)	リターン	リスク (分散)	共分散
資産B	40	1.0	16.0	
資産C	60	3.0	25.0	



問題(2)の答え

- 資産BとCの共分散

$$20\% \times (-2-1) \times (-7-2) + 30\% \times (0-1) \times (2-2) + 40\% \times (2-1) \times (5-2) + 10\% \times (6-1) \times (8-2) = \mathbf{9.6}$$

- 資産BとD共分散

$$20\% \times (-2-1) \times (4-1) + 30\% \times (0-1) \times (2-1) + 40\% \times (2-1) \times (0-1) + 10\% \times (6-1) \times (-4-1) = \mathbf{-5.0}$$

- 資産BとCの相関係数 = $9.6 \div (\sqrt{5} \times \sqrt{23.4}) \approx \mathbf{0.89}$

- 資産BとDの相関係数 = $-5.0 \div (\sqrt{5} \times \sqrt{5}) = \mathbf{-1}$



問題(3)の答え

- ポートフォリオ(リターン)

$$40\% \times 1.0\% + 60\% \times 3.0\% = \mathbf{2.2\%}$$

- ポートフォリオ(分散)

$$(40\%)^2 \times 16 + (60\%)^2 \times 25 + 2 \times 40\% \times 60\% \times 2 = \mathbf{12.52}$$

- ポートフォリオ(標準偏差)

$$\sqrt{12.52} \approx \mathbf{3.54}$$



第2回授業の課題

- 問題1. カッコ内に数値、言葉を埋めなさい。
四捨五入して円単位で答えること。

国	現地 価格	購買力 平価	為替 レート	乖離
日本	480円			
中国	25. 5元	①	1元 = 20円	②
ユーロ	5. 7ユーロ	③	1ユーロ = 172円	④



問題1の答え

- 問題1. カッコ内に数値、言葉を埋めなさい。
四捨五入して円単位で答えること。

国	現地 価格	購買力 平価	為替 レート	乖離
日本	480円			
中国	25. 5元	19円	1元 = 20円	1円円安
ユーロ	5. 7ユーロ	84円	1ユーロ = 172円	88円円安



第2回授業の課題

- 問題2 日本の年金利が5%、米国の年金利が10%のとき
 - ①米国金利は変化しないで、日本の金利が2%になったとき、直先スプレッドは何円になるか？四捨五入し、小数点以下第2位まで答えなさい。
 - ②米国の金利は変化しないで、日本の金利が8%になると直先スプレッドはどうなるか？〇〇円だけ、拡大(縮小)するという形で答えなさい。
 - ③日本の金利が5%のまま変化しないで、米国の金利が2%になった場合はどうか？フォワード・プレミアムはいくらか？

問題2の答え

- ① $100 \times (1 + 0.02) \div (1 + 0.1) = 92.73$
- $100 - 92.73 = 7.27$ 円

- ② $100 \times (1 + 0.08) \div (1 + 0.1) = 98.18$
- $100 - 98.18 = 1.82$ 円
- $100 \times (1 + 0.05) \div (1 + 0.1) = 95.45$ ←元の計算
- $100 - 95.45 = 4.55$ 円
- $1.82 - 4.55 = -2.73$ 円 2.73円縮小

- ③ $100 \times (1 + 0.05) \div (1 + 0.02) = 102.94$
- フォワード・プレミアム = (先物レート) - (現物レート)
- $102.94 - 100 = 2.94$ 円



第3回授業の課題

- 問題 以下の計算問題を解きなさい。
- ①現在のA社の株価が1000円、年金利が12%であるとする。このとき、三か月物の先物価格はいくらになるか？
- ②上記で、年配当利回りが8%であるとき、この三か月物の先物価格はどうか？
- ③小麦の現在の価格がトン当たり5000万円とする。年金利が6%、保管費用が年金利に直すと4%、コンベニエンス・イールドは年金利で8%とする。このとき、小麦の半年物の先物価格はいくらになるか？



答え

- ① $1000\text{円} \times (1 + 0.12 \div 4)$
 $= 1000\text{円} \times (1 + 0.03) = 1030\text{円}$
- ② $1000\text{円} \times (1 + (0.12 - 0.08) \div 4)$
 $= 1000\text{円} \times (1 + 0.04 \div 4) = 1010\text{円}$
- ③ $5000\text{万円} \times (1 + (0.06 + 0.04 - 0.08) \div 2)$
 $= 5000\text{万円} \times (1 + 0.02 \div 2) = 5050\text{万円}$



第4回授業の課題

- 問題 以下の問いに答えなさい。
- ①いま、行使価格500円のコールプレミアムが50円、行使価格500円のプットプレミアムが38円となっているとき、ストラドルの売りを組んだとする。このとき満期の原資産価格が(a)400円の時、(b)500円の時、(c)600円の時、ペイオフはいくらになるか？ただし、時間経過による価値の変化は含めない。
- ②原資産価格500円、行使価格460円のコールプレミアムが70円であるとする。このとき、本源的価値と時間価値はそれぞれいくらになるか？



答え

① ストラドルの売り＝コールのショート＋プットのショートなので、契約当初に $50 + 38 = 88$ 円のプレミアムを得る。

(a) 400円の場合は、プットが行使されて $400 - 500 = -100$ だから、100円の損失。いま時間価値を考慮しないので、 $-100 + 88 = -12$ 。よって12円の損失。

(b) 500円の場合は、オプションが行使されず、88円の利益。

(c) 600円の場合は、(a)とは違いコールが行使されて100円の損失。いま時間価値を考慮しないので、 $-100 + 88 = -12$ 。よって12円の損失。

② 本源的価値: $500 - 460 = 40$ 円

時間価値: $70 - 40 = 30$ 円



第5回授業の課題

- 問題 以下の問いに答えなさい。
- (1) 原資産価格500円、行使価格460円のコールオプションのプレミアムが70円とする。また、満期までのリスクフリーレートは5%とする。このとき、プットオプションのプレミアムはいくらか？
- (2) 原資産は現在80円、時点1で確率50%で88円になり、確率50%で72円になるとする。この期間のリスクフリーレートは5%とする。
 - ① リスク中立確率はいくらか？
 - ② この資産の行使価格84円のプットオプションのプレミアムはいくらか？



問題(1) 答え

原資産価格(S) = 500円

行使価格(K) = 460円

コールオプションプレミアム(C) = 70円

リスクフリーレート(r) = 5%

プットコール・パリティ式を使用する: $C = P + S - K / (1 + r)$

これを変形すると: $P = C - S + K / (1 + r)$

したがって、 $70 - 500 + 460 / (1 + 0.05) = 8.0952$

答: プットオプションのプレミアムは約8.10円



問題(2)①答え

原資産価格(S_0) = 80円

上昇時(S_u) = 88円 $u = \frac{S_u}{S_0} - 1 = \frac{88}{80} - 1 = 0.10$

下落時(S_d) = 72円 $d = \frac{S_d}{S_0} - 1 = \frac{72}{80} - 1 = -0.10$

リスクフリーレート(r) = 5%

$$p^* = \frac{r - d}{u - d} = \frac{0.05 - (-0.10)}{0.10 - (-0.10)} = 0.75$$

答: リスク中立確率は0.75



問題(2)②答え

行使価格84円のプットオプションのプレミアムの価格

リスク中立確率(p^*) = 0.75

上昇時: $\max(84-88, 0) = 0$

下落時: $\max(84-72, 0) = 12$

$$C = \max(S - K, 0)$$

$S > K$ のとき利益

$$P = \max(K - S, 0)$$

$S < K$ のとき利益

$$\begin{aligned} & \frac{p^* \times (\text{上昇時のペイオフ}) + (1 - p^*) \times (\text{下落時のペイオフ})}{(1 + r)} \\ &= \frac{0.75 \times 0 + 0.25 \times 12}{1.05} \cong 2.857 \end{aligned}$$

答: プットオプションのプレミアムは約2.86円



第7回授業の課題

(1) 債券価格

- ①額面100円、2年満期、クーポンレート5%の利付債がある。割引率がいずれの期間も年5%のとき債券価格はいくらか？
- ②額面100円、2年満期、クーポンレート5%の利付債がある。割引率が1年間は年5%、2年間は年6%のとき債券価格はいくらか？
- ③額面100円、2年満期の割引債がある。割引率が年5%のとき債券価格はいくらか？
- ④額面100円、クーポンレート5%のコンソル債がある。割引率がいずれの期間も年5%のとき債券価格はいくらか？



問題(1)債券価格の答え

- ① 額面(Q) 100円、利息(C) $=100 \times 5\% = 5$ 円
割引率(r) 5%、満期(n) 2年

$$\begin{aligned} P &= \frac{C}{1+r} + \frac{C+Q}{(1+r)^2} \\ &= \frac{5}{(1+0.05)} + \frac{5+100}{(1+0.05)^2} \\ &= 100 \end{aligned}$$

答:債券価格は100円



問題(1)債券価格の答え

② 額面(Q) 100円、利息(C) $=100 \times 5\% = 5$ 円
1年間の割引率(r) 5%、2年間の割引率(r) 6%、
満期(n) 2年

$$\begin{aligned} P &= \frac{C}{1 + r_1} + \frac{C + Q}{(1 + r_2)^2} \\ &= \frac{5}{(1 + 0.05)} + \frac{5 + 100}{(1 + 0.06)^2} \\ &= 98.2115 \end{aligned}$$

答:債券価格は約98.21円



問題(1)債券価格の答え

③ 額面(Q) 100円、割引率(r) 5%、満期(n) 2年

$$\begin{aligned} P &= \frac{Q}{(1+r)^n} \\ &= \frac{100}{(1+0.05)^2} \\ &= 90.7029 \end{aligned}$$

答:債券価格は約90.70円



問題(1)債券価格の答え

- ④ 毎年クーポン(C) 5円、割引率(r) 5%、満期なし

$$P = \frac{C}{r}$$

$$= \frac{5}{0.05}$$

$$= 100$$

答:債券価格は100円



第7回授業の課題

(2) マコーレー・デュレーション

- 額面100円、3年満期、クーポンレート6%の利付債が100円で売り出されている。複利最終利回りは6%、マコーレー・デュレーションが2.8334とする。
- つぎの場合マコーレー・デュレーションはどうなるか？ほかの条件は変わらないものとする。
- ①2年満期の場合
- ②クーポンレートが7%の場合（債券価格は102.67円となる）
- ③複利最終利回りが7%の場合（債券価格は97.38円となる）



問題(2) マコーレー・デュレーションの答え

① 2年満期の債券価格も100円なので

$$MD = 1 \times W_1 + 2 \times W_2$$

$$= 1 \times \frac{1}{100} \left(\frac{6}{1.06} \right) + 2 \times \frac{1}{100} \left(\frac{6 + 100}{(1.06)^2} \right) = 1.9434$$



問題(2) マコーレー・デュレーションの答え

②クーポンが7%、満期3年の債券価格は102.67円
なので

$$\begin{aligned} MD &= 1 \times W_1 + 2 \times W_2 + 3 \times W_3 \\ &= 1 \times \frac{1}{102.67} \left(\frac{7}{1.06} \right) + 2 \times \frac{1}{102.67} \left(\frac{7}{(1.06)^2} \right) \\ &\quad + 3 \times \frac{1}{102.67} \left(\frac{7 + 100}{(1.06)^3} \right) = 2.81 \end{aligned}$$



問題(2) マコーレー・デュレーションの答え

③最終複利利回りが7%、債券価格は97.38円
なので

$$\begin{aligned} MD &= 1 \times W_1 + 2 \times W_2 + 3 \times W_3 \\ &= 1 \times \frac{1}{97.38} \left(\frac{6}{1.07} \right) + 2 \times \frac{1}{97.38} \left(\frac{6}{(1.07)^2} \right) \\ &\quad + 3 \times \frac{1}{97.38} \left(\frac{6 + 100}{(1.07)^3} \right) = 2.8311 \end{aligned}$$



第7回授業の課題

(3) コンベクシティ

- 額面100円、年利2%、残存5年、デュレーション4.8、コンベクシティ52の債券がある。
市場金利が1%上昇した場合の価格変化率を求めなさい。

(4) デフォルトを考慮した債券価格

- 1年満期、額面100円、クーポンレート5%、割引率5%、デフォルト確率2%とする。投資家はリスク中立的であるとする。
- このとき、債券価格と信用リスクプレミアムを求めなさい。



問題(3)コンベクシティの答え

額面100円、年利2%、残存5年、デュレーション4.8、
コンベクシティ 52の債券が市場金利が1%上昇した場合の価格変化率

$$\begin{aligned}\frac{\Delta P}{P} &\approx -D\Delta r + \frac{1}{2}C\Delta r^2 \\ &= -4.8 \times 0.01 + \frac{1}{2} \times 52 \times (0.01)^2 \\ &= -0.0480 + 0.0026 = -0.0454\end{aligned}$$

債券価格は4.54%下落



問題(4)デフォルトを考慮した債券価格の答え

額面100円、クーポンレート 5%、デフォルト確率2%、
割引率5%のとき

$$\text{【期待収益】} = 105 \times 0.98 + 0 \times 0.02 = 102.90$$

$$\text{【現在価格】} = \frac{102.90}{1.05} = 98.00 \text{ 円}$$

$$\text{【複利最終利回り】} = \frac{105 - 98}{98} = 0.071428 \text{ (約7.14\%)}$$

$$\text{信用リスク・プレミアム} = 7.14\% - 5\% = 2.14\%$$

割引率ではなく、デフォルトのないときの利回りとの差



第8回授業の課題

- 資産の修正デュレーションが5年、市場価値ベースの自己資本比率が10%である生命保険会社がある。
- いま、同社は、金利が変動しても自己資本が変動しないようにイミュナイゼーションしている。
- この保険会社の負債の修正デュレーションは何年か？（※割り切れない場合は、四捨五入して小数点一位まで答えよ。）



答え

資産の修正デュレーション $D_A = 5$ 年

自己資本比率から資産負債比率を求める

$$\frac{S}{MV_A} = 0.10 \Rightarrow \frac{MV_L}{MV_A} = 1 - 0.10 = 0.90$$

イミューネイゼーションの条件

$$D_A - \frac{MV_L}{MV_A} D_L = 0$$

したがって、

$$D_L = \frac{D_A}{MV_L / MV_A} = \frac{5}{0.9} \approx 5.6$$

答: 負債の修正デュレーションは約 5.6 年



第9回授業の課題

- (1) 10年満期、5%クーポンの利付債が95円で売り出されている。この債券を2年後に99円で売却する場合、「保有期間利回り」はいくらになるか？
- (2) 開始時点からの各年限のスポットレートが下表のとき、1年先、2年先のフォワードレートはいくらになるか？

年限	1	2	3
スポットレート	2%	2.3%	2.5%



(1)保有期間利回りの答え

額面100円、クーポン5% (年5円)

現在価格:95円

2年後に99円で売却

三番目の式を用いて

$$= \frac{5 + (99 - 95)/2}{95} \times 100$$

$$r \approx 7.368\%$$

$$\text{最終利回り} = \frac{\text{利率} + \frac{\text{償還価格} - \text{購入価格}}{\text{残存期間 (年)}}}{\text{購入価格}} \times 100$$

$$\text{応募者利回り} = \frac{\text{利率} + \frac{\text{償還価格} - \text{発行価格}}{\text{償還期限 (年)}}}{\text{発行価格}} \times 100$$

$$\text{所有期間利回り} = \frac{\text{利率} + \frac{\text{売却価格} - \text{購入価格}}{\text{所有期間 (年)}}}{\text{購入価格}} \times 100$$

答: 保有期間利回りは 約7.37% / 年



(2)フォワードレートの答え

年限1年：2.0%、年限2年：2.3%、年限3年：2.5%
1年先

$$(1+0.023)^2 = 1.046529$$

$$\frac{1.046529}{(1+0.020)} \approx 1.0260088$$

$$1.0260088 - 1 \approx 2.60\%$$

2年先

$$(1+0.025)^3 = 1.076890625$$

$$\frac{1.076890625}{1.046529} \approx 1.0290117$$

$$1.0290117 - 1 \approx 2.90\%$$

答：1年先の1年物フォワードレートは2.60%、
2年先の1年物フォワードレートは2.90%



第9回授業の課題

- (3) 各時点からの1年物フォワードレートが下表のとき、イールドカーブを描くための年限2年、および3年のスポットレートはいくらになるか？

開始時点	0	1	2
フォワードレート	2%	2.3%	2.5%

- (注) 1年物スポットレート=1年物フォワードレート=2%



(3)スポットレートの答え

2年物スポットレート

$$(1+0.020) (1+0.023) = 1.04346$$

$$\sqrt{1.04346} - 1 = 2.15\%$$

3年物スポットレート

$$(1+0.020) (1+0.023) (1+0.025) = 1.0695465$$

$$\sqrt[3]{1.0695465} - 1 = 2.27\%$$

答:2年スポットレートは2.15%、3年スポットレートは2.27%



第10回授業の課題

- ある銀行が保有する株式ポートフォリオの時価総額が1000億円で、保有期間10日間の株式ポートフォリオの変動(標準偏差)は8%であった。同行は分散共分散法でVaRを計測している。
- 当該保有期間における99.5% VaRを求めなさい。(※四捨五入して、億円で答えよ。)



答え

保有期間 (10日間) における 99.5% VaRを求める

ポートフォリオ時価: 1000億円

10日間の変動(標準偏差): 8%

信頼係数: 2.576 (99.5%の信頼水準に対応する標準正規分布の値)

$VaR = \text{【エクスポージャー】} \times \text{【保有期間のボラティリティ】} \times \text{【信頼係数】}$

$$= 1000 \times 0.08 \times 2.576$$

$$= 206.08 \text{億円}$$

答: 保有期間(10日間)における 99.5% VaR は約 206億円



第11回授業の課題

- ある銀行が1年後の期待キャッシュフローが110億円の融資ポートフォリオを有している。
- この融資ポートフォリオのデフォルト確率は5%、デフォルト時損失率は40%であると推定されている。
- いま、リスクフリーレートが1%、信用リスクのリスクプレミアムが3%のとき、この融資ポートフォリオの価値はいくらになるか？



答え

①割引率の計算:

$$\text{割引率} = 1\% + 3\% = 4\%$$

②ポートフォリオの価値(現在価値)の計算:

現在価値

$$= 1\text{年後の期待キャッシュフロー} \div (1 + \text{割引率})$$

$$= (110 \times 0.95 + 110 \times 0.05 \times 0.6) \div (1 + 0.04)$$

$$= 103.6538\text{億円}$$

答:ポートフォリオの価値は約103.65億円となります。